РАЗНОЕ

УДК 519.6-519.83-519.86 1.5.2 Биофизика

DOI: 10.37903/vsgma.2022.3.24 EDN: HXORQG

ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА УГЛОВ МИКРОВАСКУЛЯРНОГО УЗЛА

© Прудников И.М.[1], Борисов В.В.[2]

[1]Смоленский государственный медицинский университет, 214019, Россия, Смоленск, ул. Крупской, 28
[2]Филиал Национального исследовательского университета МЭИ, 214013, Россия, Смоленск, Энергетический проезд,1

Резюме

Цель. Выполнить анализ уравнений С.Д. Муррея с установлением аналитической и графической зависимости между собой углов отклонений сосудов в микрососудистом узле.

Методика. Решается система уравнений Муррея, описывающая микрососудистый узел кровеносной системы человека или животного. С помощью аппарата линейной алгебры доказана линейная зависимость системы уравнений Муррея. Поэтому одно уравнение системы уравнений заменили на уравнение неразрывности потока крови. Решением новой системы уравнений является уравнение для углов микроваскулярного узла, ранее не встречавшееся в литературе. Уравнение решается с помощью математических пакетов MATCAD и алгоритмического языка Python.

Результаты. Получено уравнение для углов отклонений друг от друга сосудов в узле микрососудистой кровеносной сети человека или животного. Уравнение решено на компьютере, использовав математический пакет MATCAD, а также алгоритмический язык Python. В итоге дана графическая зависимость между собой углов отклонений сосудов в микрососудистом узле кровеносной системы, построен график зависимости одного угла от другого. Приведены трехмерные графики функций, описывающих зависимость углов отклонений сосудов друг от друга в узле кровеносной системы.

Заключение. Выведенное уравнение для углов отклонений друг от друга сосудов в узле кровеносной системы имеет практическое применение при построении искусственных капиллярных сетей, а также разветвленных трубопроводных сетей для оптимальной, в смысле затрата энергии, перекачки нефти, газа и любой жидкости. Полученное уравнение может быть использовано для экспериментальной проверки уравнений Муррея.

Ключевые слова: уравнения Муррея, правила бифуркации капиллярных сетей, принцип оптимальности для микрососудистых узлов

FORMULA FOR CALCULATION OF ANGLES OF A MICROVASCULAR NODE

Prudnikov I.M.[1], Borisov V.V.[2]

[1]Smolensk State Medical University, 28, Krupskoj St., 214019, Smolensk, Russia
[2]Branch of «National Research University of Moscow Energy Institute", 1, Energetichesky projezd, 214013, Smolensk, Russia

Abstract

Objective. Analysis of the Murray's equations, obtaining an analytical and graphic relationship between the angles of deviations of the vessels in a microvascular node.

Methods. The system of the Murray's equations is solved, which describes a microvascular node of the human's or animal's circulatory system. Using the apparatus of linear algebra, the linear dependence of the system of the Murray's equations is proved. Therefore, one equation of the system of equations was replaced by the equation of continuity of blood flow. The solution of the new system of equations is the equation for the angles of the microvascular node, which has not previously been found in the literature.

The equation is solved using the mathematical packages MATCAD and the algorithmic language Python.

Results. An equation for the angles of deviations from each other of the vessels in a node of the microvascular circulatory system of a person or an animal is obtained. The equation was solved on a computer using the mathematical package MATCAD, as well as the algorithmic language Python. As a result, the graphical relationship between the angles of deviations of the vessels in a microvascular node of the circulatory system is given, a graph of the dependence of one angle on another is plotted. The three-dimensional graphs of functions describing the dependence of the angles of deviations of the vessels from each other in a node of the circulatory system are presented.

Conclusion. The derived equation for the angles of deviations from each other of the vessels in a node of the circulatory system has the practical application in construction of artificial capillary networks, as well as pipeline networks for optimal, in terms of energy consumption, pumping oil, gas and any liquid. The resulting equation can be used for experimental testing of the Murray's equations.

Keywords: the Murray's equations, the rules for bifurcation of capillary networks, the principle of optimality for microvascular nodes

Введение

Впервые узел микрососудистой сети математически описал С.Д. Муррей в своей, ставшей уже классической, работе [7]. Формулы он получил, исходя из принципа наименьшего действия, хорошо известного в механике. Фактически этот принцип основан на наименьшей затрате энергии крови при ее движении в капиллярной сети. После знаменитой работы С.Д. Муррея появилось огромное количество работ, посвященных анализу уравнений и их физической трактовке [1-4]. Так в работе [1] были введены кванты крови и показано, что уравнений С.Д. Муррея следуют из закона сохранения импульса кванта крови при его делении на подкванты в узле капиллярной сети. Надо учесть, что сами уравнения С.Д. Муррея были получены для ламинарного движения крови в сосуде диаметром более 100 мкм. В сосудах диаметром менее 100 мкм возникает турбулентность (завихрение), проявляются вязкие свойства крови. Поэтому уравнения С.Д. Муррея требуют модификации, а именно: введения коэффициента вязкости, что и было сделано в работе [1].

Авторы поставили перед собой задачу дальнейшего анализа уравнений С.Д. Муррея, оптимизация их решения, а также анализ результатов на компьютере с привлечением обширного математического аппарата. Надо отметить, что сами уравнения, записанные ниже, линейно зависимые, что показано. Поэтому для их решения надо использовать еще одно уравнение, основанное на другом физическом законе, а именно: на законе сохранения потока жидкости в микрососудистом узле. Сохраняя два уравнения в системе уравнений С.Д. Муррея и добавляя новое, мы получим систему трех независимых уравнений. Дальнейшая задача – это решить полученную систему уравнений и вывести зависимость для углов отклонений сосудов в узле капиллярной сети, что и было сделано. С помощью оптимизационных методов с использованием штрафных функций с различными начальными точками получен массив данных, по которому построено графическое решение уравнения. Из графиков видно, что углы отклонений зависят друг от друга согласно полученной криволинейной зависимости, график которой приведен: задавая один угол, мы получает другой угол (углы).

Цель исследования – выполнить анализ уравнений С.Д. Муррея с установлением аналитической и графической зависимости между собой углов отклонений сосудов в микрососудистом узле.

Методика

Различные исследователи по-разному изучают систему уравнений Муррея. Так в [1] вместо радиусов сосудов используют диаметры сосудов и вводит углы между сосудами, а не углы отклонений, как это написано ниже, а сами уравнения трактует как закон сохранения импульса для квантов крови. В работе используются обозначения из [7].

Результаты исследования и их обсуждение

Итак, пусть x и y – углы отклонений (разветвлений) капиллярных сосудов в узле (рис. 1).

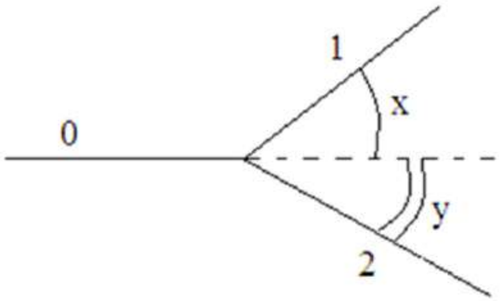

Рис.1. Микрососудистый узел кровеносной системы с углами отклонений *x* и *y*

Пусть также r_0, r_1, r_2 – радиусы капиллярных сосудов 0,1,2 соответственно. Тогда уравнения Муррея для сосудов 0, 1, 2, изображенных на рис. 1, записываются в виде [6, 7]

$$\begin{cases} r_0^2 & = & (cosx)r_1^2 + (cosy)r_2^2 \\ r_1^2 & = & (-\cos(x+y))r_2^2 + (cosx)r_0^2 \\ r_2^2 & = & -\cos(x+y)\,r_1^2 + (cosy)r_0^2 \end{cases}$$

Покажем, что данная система линейно зависимая, если ее рассматривать как систему относительно переменных r_0^2, r_1^2, r_2^2. Подставим r^2_0 во вторую и третью формулы, приведем подобные. В итоге получим систему

$$\begin{cases} (sin^2 x)r_1^2 - (\mathrm{sinx})(\mathrm{siny})\,r_2^2 = 0 \\ -(\mathrm{sinx})(\mathrm{siny})r_1^2 + (sin^2 y)r_2^2 = 0 \end{cases}$$

которая линейно зависимая, так как определитель этой системы равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} sin^2 x & -(\mathrm{sinx})(\mathrm{siny}) \\ -(\mathrm{sinx})(\mathrm{siny}) & sin^2 y \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому вместо первого уравнения запишем уравнение непрерывности потока [6-7], из которого следует равенство для кубов:

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3.$$

Это равенство для объемов квантов крови в точке разветвления сосудах. Впервые термин «квант» крови был введен в [1]. Получаем новую систему уравнений

$$\begin{cases} r_0^3 & = & r_1^3 + r_2^3 \\ r_1^2 & = & (-\cos(x+y))r_2^2 + (cosx)r_0^2 \\ r_2^2 & = & -\cos(x+y)\,r_1^2 + (cosy)r_0^2 \end{cases}$$

относительно переменных r_0^2, r_1^2, r_2^2 .

В результате преобразований получаем уравнение относительно углов *x, y*.

$$1 - \left(\frac{cosx - \cos(x+y)\,cosy}{sin^2(x+y)}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{cosy - \cos(x+y)\,cosx}{sin^2(x+y)}\right)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

следствием которого является уравнение

$$sin^{1.5}(x+y) = sin^{1.5}(y) + sin^{1.5}(x). \qquad (1)$$

На электронной вычислительной машине было промоделировано решение этого уравнения на языке Python. Для различных начальных значений x через y(x) обозначим решение написанного выше уравнения, т.е.

$$sin^{1.5}(x + y(x)) = sin^{1.5}(y(x)) + sin^{1.5}(x).$$

Получен большой массив данных, по которому построен график решения, приведенный ниже.

Построим поверхность

$$z(x,y) = sin^{1.5}(x+y) - sin^{1.5}(y) - sin^{1.5}(x)$$

и найдем ее сечение плоскостью, параллельной X0Y на уровне z (x, y) = 0.

При $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ получен график поверхности z=z(x,y), изображенный на рис. 2..

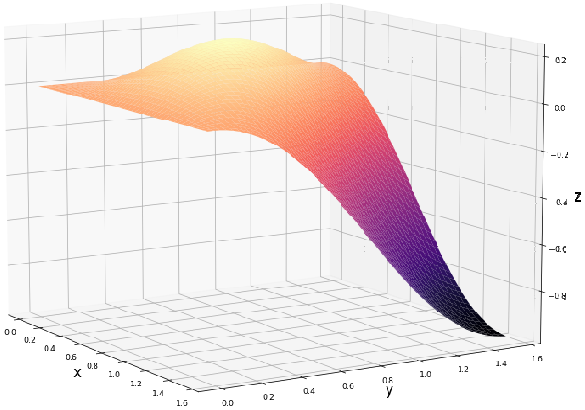

Рис. 2. График поверхности z=z (x, y) для $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Зависимость решения уравнения (1), которое мы обозначили через y(x), имеет вид, изображенный на рис. 3.

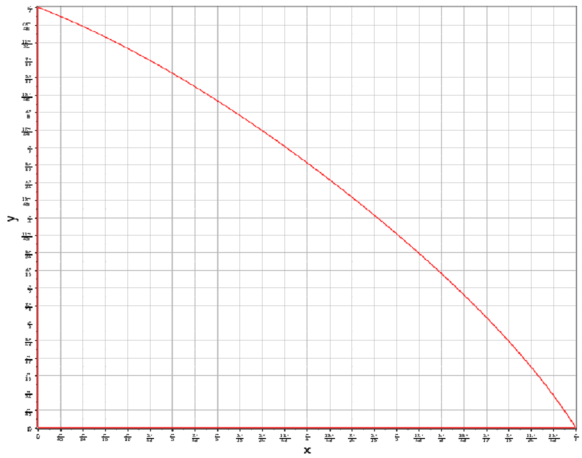

Рис. 3. График зависимости решения y=y(x)

Для более детального изучения поверхности z=z(x,y) построен график функции z=z(x,y) для $x \in [0; 2\pi], y \in [0; 2\pi]$, который имеет вид, показанный на рис. 4.

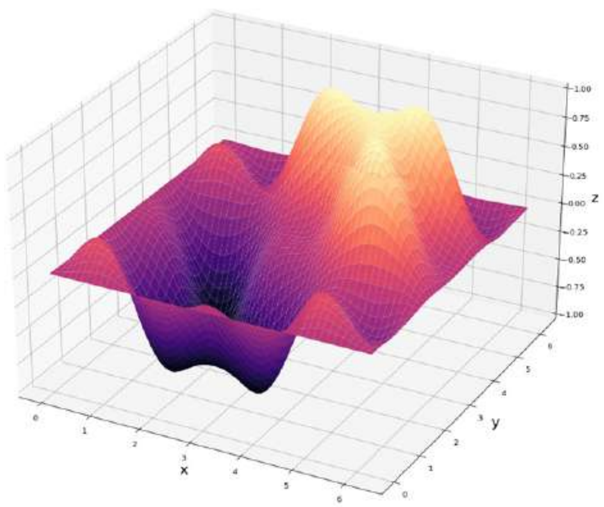

Рис. 4. График функции z=z (x, y) для $x \in [0; 2\pi], y \in [0; 2\pi]$

Уравнение (1) можно переписать в более удобном виде. Введем углы

$$u = \pi - x, \qquad w = \pi - y, \qquad v = x + y.$$

Это углы между сосудами. Поскольку

$\sin x = \sin(\pi - u) = \sin u, \ \sin y = \sin(\pi - w) = \sin w, \qquad x + y = v,$

поэтому уравнение (1) может быть переписано в виде

$$sin^{1.5}(v) = sin^{1.5}(w) + sin^{1.5}(u).$$

Изучением системы уравнений Муррея, полученной около 100 лет назад, занимаются многие исследователи [1-7]. Эта система интересна тем, что она описывает морфологию кровеносной системы человека и любого животного. Кровеносная система имеет огромную протяженность. Кровь движется по кровеносным сосудам практически без трения, иначе сердце не справилось бы со своей задачей.

Целью исследования явилось решение системы уравнений Муррея, которая является линейно зависимой. Была получена линейно независимая система уравнений, связывающая радиусы кровеносных сосудов и углы отклонений сосудов в узле кровеносной системы. Решением уравнений является уравнение для углов отклонений сосудов в узле кровеносной системы. Аналитически решить полученное уравнение не удается, поэтому применялось графическое решение на компьютере с помощью математических пакетов и алгоритмического языка Python.

Решение полученного уравнения на компьютере (рис. 2-4) важно для практического применения. Это решение дает нам возможность понять, как устроена наша капиллярная сеть для ее 3D модели. Результаты настоящего исследования могут быть использованы при разработке микромашинных кибернетических платформ и технологий для культивирования саморазвивающихся функционирующих эндотелиальных капиллярных сетей in vitro в пространстве организованных микропотоков питательной среды и биофабрикации на их основе тканеподобных образований и органоподобных структурно-функциональных единиц с заданными биологическими и функциональными свойствами, которые создаются в рамках проводимых проектов.

Полученные уравнения и их решения на компьютере важны для оптимальной перекачки нефти, газа и любой жидкости по сети трубопроводов. Сети трубопроводов, построенные на основе полученных уравнения, будут оптимальными в смысле затрата энергии для перекачки.

Дальнейшая задача – это экспериментальная проверка полученного уравнения, применяя статистическую обработку с проверкой на достоверность полученных результатов. Экспериментальная проверка полученного уравнения проще, чем системы из трех уравнений Муррея, так как оно одно и в него не входят радиусы сосудов кровеносной системы.

Выводы

1. Применение полученного уравнения для углов между сосудами в узле кровеносной системы позволяет построить ее трехмерную модель, что важно для культивирования саморазвивающихся функционирующих эндотелиальных капиллярных сетей.
2. Необходимо использовать полученное уравнение в технике при прокладке трубопроводных и водопроводных сетей для перекачки нефти, газа или любой жидкости.

Литература (references)

1. Глотов В.А. Правила Ру и конфигурации микрососудистых бифуркаций // Биофизика. – 1992. – Т.37, Вып.2. – С. 341-344. [Glotov V.A. *Biofizika.* Biophysics. – 1992. – V.37, N2. – P. 341-344. (in Russian)]
2. Розен Р. Принцип оптимальности в биологии. – М.: Из-во «Мир», 1969. – 215 с. [R. Rozen. *Printsip optimal'nosti v biologii.* The principle of optimality in biology. – Moscow: Iz-vo «Mir», 1969. – 215 p. (in Rusian)]
3. Cohn D.L. On optimal system: I. The vascular system // Bulletin of Mathematical Biophysics. – 1954. – V.16, P. 59-74.
4. Cohn D.L. On optimal system: II. The vascular system // Bulletin of Mathematical Biophysics. – 1955. – V.17. – P. 219-227.

5. Murray C.D. The physiological principle of minimum work applied to the angle of branching of arteries // J. of General Physiology. – 1926. – V.9, N6. – P. 835-841.
6. Murray C.D. The physiological principle of minimum work. I. The vascular system and the cost of blood volume // Physiology. – 1926. – V.12. – P. 207-213.
7. Murray C.D. The physiological principle of minimum work. II. Oxygen exchange in capillaries // Physiology. – 1926. – V.12. – P. 299-304.

Информация об авторах

Прудников Игорь Михайлович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник научно-исследовательского центра ФГБОУ ВО «Смоленский государственный медицинский университет» Минздрава России. E-mail: prudnik09@yandex.ru

Борисов Вадим Владимирович – доктор технических наук, профессор кафедры вычислительной техники филиала НИУ МЭИ ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет МЭИ». E-mail: vbor67@mail.ru

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.